

SA GEOGEBROM U INTEGRACIJU MATEMATIKE I PRIRODNIH NAUKA

Milan Živanović¹, Tanja Radovanović², Aleksandra Đurić Karaklić³

Rezime. Primena savremenih tehnologija u nastavi i šire u učenju zahvaljujući razvoju efikasnih kopjuterskih aplikacija sve više je u upotrebi. Sa druge strane prožimanje programa različitih školskih predmeta omogućava sveobuhvatnije tretiranje konkretnih nastavnih tema. Vezano sa tim ovaj rad predstavlja različite mogućnosti korišćenja programskog paketa Geogebra u realizaciji integracije matematike i prirodnih nauka. Konkretno biće predstavljeni alati pomenutog programa i njihova primena u vizuelizaciji sadržaja fizike, hemije i biologije i njihova povezanost sa odgovarajućim matematičkim tehnikama. Velika prednost Geogebre je i u tome što automatski omogućava autorima da svoje radove jednostavno postavljaju na internet čime to postaje opšte dostupno školskoj populaciji na različitim nivoima. Primere predstavljene u ovom radu zajednički su izabrali autori a u Geogebri ih je modelovao Milan Živanović.

Ključne reči: Integracija nastave, Geogebra, Matematika, Fizika, Hemija, Biologija

WITH GEOGEBRA IN THE INTEGRATION OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES

Abstract. The application of modern technologies in teaching and more widely in learning thanks to the development of efficient computer applications is increasingly in use. On the other hand, the interweaving of the programs of different school subjects enables a more comprehensive treatment of specific teaching topics. In this regard, this paper presents various possibilities of using the Geogebra program package in the realization of the integration of mathematics and natural sciences. Specifically, the tools of the mentioned program will be presented and their application in the visualization of the content of physics, chemistry and biology and their connection with appropriate mathematical techniques. A great advantage of Geogebra is that it automatically allows authors to simply post their works on the Internet, which makes it generally available to the school population at different levels. The examples presented in this paper were jointly chosen by the authors and modeled in Geogebra by Milan Zivanovic.

Key words: Integration of teaching, Geogebra, Mathematics, Physics, Chemistry, Biology

1. UVOD

U savremenom obrazovanju kao veoma produktivan vid rada ističe se integrativni pristup nastavnim sadržajima. On podrazumeva interdisciplinarni prilaz obradi zajedničkih tema iz dva ili više nastavnih predmeta, a njegova osnova je u korelaciji teorijskih sadržaja tih predmeta. Od tipa korelacije nastavnih sadržaja zavisi i oblik integracije. Tako se može govoriti o horizontalnoj ili vertikalnoj integraciji u zavisnosti od toga da li se posmatrana teorija izučava na istom ili različitim nivoima školovanja. U užem smislu pod modelom integrativne nastave podrazumeva se projekat zajedničke organizacije dva ili više časova od strane dva ili više nastavnika na zajedničkoj temi. Šire to može biti svaka aktivnost na jednom segmentu određene nastavne jedinice koji ima mogućnosti međupredmetnog sagledavanja.

Prednosti ovakvog učenja su višestruki. Promena tačke gledanja na određeni problem osvežava pažnju i podstiče na traženje drugačijih rešenja. Samim tim se aktiviraju misaoni procesi i brže

¹Doktor metodike nastave matematike, penzioner, mzivanovic@vaspks.edu.rs:

²Profesor hemije, gimnazija „Josif Pančić“ Bajina Bašta Vuka Karadžića 32, acimovic.tanjab@gmail.com

³Diplomirani biolog, gimnazija „Josif Pančić“ Bajina Bašta Vuka Karadžića 32, alaksandradjuric@gimnazijabb.edu.rs

usvajaju funkcionalna znanja. To vodi suštinskom razumevanju nastavnih sadržaja integrisanih predmeta i uviđenju njihove realne primene. Stoga su saznanja stečena na ovaj način dugotrajnija i imaju veći praktični potencijal.

Matematika je povezana sa skoro svim nastavnim predmetima, a izuzetno sa onim koji spadaju u korpus prirodnih nauka. To kao posledicu ima široke i raznovrsne mogućnosti izvođenja nastavnih integrativnih poduhvata sa tim predmetima. Savremene IK (informacione komunikacione) tehnologije i u ovim aktivnostima pružaju nove mogućnosti. Predstavljanjem prirodnih pojmova i procesa, koje je nemoguće realizovati u učionici, kroz pregledne skice i animacije, omogućava analizu uzročno posledičnih veza na očitogledan način. U ovom radu će biti prikazano nekoliko primeri modeliranja pojmova i procesa prirodnih nauka urađenih u Geogebri koji su prožeti matematičkom teorijom.

Geogebra je kreirao austrijski matematičar Markus Hoenvarter. Program se može besplatno preuzeti i instalirati sa adrese <https://www.geogebra.org/download>. Na njegovom razvoju učestvuju više saradnika iz raznih strana sveta. Verzija ovde korišćene Geogebre je 5.0.423.0-d. Program je preveden na više jezika među kojima je i srpski pa je i time rad u njemu dodatno olakšan. Jedna od veoma značajnih osobina Geogebre je mogućnost dinamičkog predstavljanja objekata tj. simulacije njihovog kretanja. Time se omogućava modelovanje realnih objekata i procesa u njihovoj razvojnosti i dinamičkom odnosu prema drugim objektima. Primere iz fizike u ovom radu odabrao je Milan Živanović, iz hemije Tanja Radovanović, a iz biologije Aleksandra Đurić Karaklić. Aplete u Geogebri je pripremio Milan Živanović uz konsultacija sa koautorima.

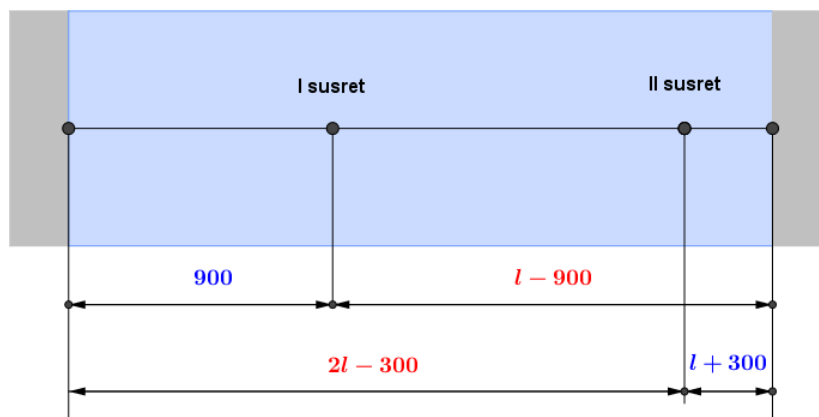
2. PRIMERI APLETA ZA INTEGRACIJU MATEMATIKE I PRIRODNIH NAUKA

2.1. Matematika i fizika

U osnovnoj i srednjoj školi najuočljivija i najčešće eksploatisana u integraciji matematike i fizike je korelacija na problemima kretanja. U [1] je prikazano nekoliko primera takvih zadataka uz animaciju i skicu uputstva za njihovo rešenje. Ovde navodimo sledeći zadatak [2].

1. Dva broda koja su krenula sa suprotnih obala jedan prema drugom sreli su se na 900 m od leve obale. Stigavši do suprotnih obala oba broda su krenula nazad ne menjajući brzine. Ponovo su se sreli na 300 m od desne obale. Kolika je širina reke?

Rešenje:



Slika 1. Skica uz prvi zadatak

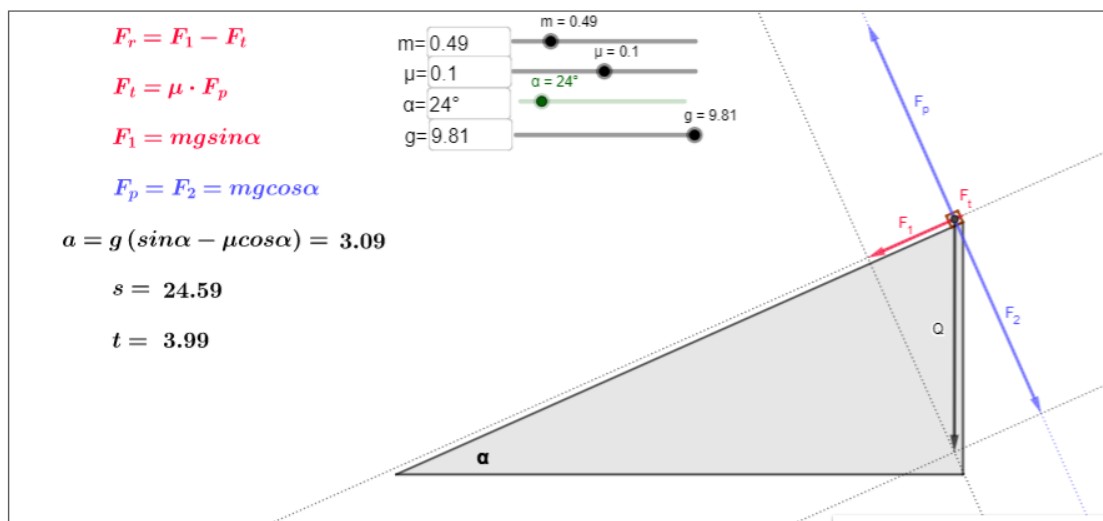
Pošto se intenzitet brzine brodova nije menjao pređeni putevi do prvog i drugog susreta su proporcionalni pa važi

$$\frac{900}{l - 900} = \frac{l + 300}{2l - 300} \quad (1)$$

odakle dobijamo $l = 2400$.

U apletu sa slike 2. izveden je zakon strme ravni [3]. Ovde za zadatu visinu, izabrani ugao strme ravni i dato trenje moguće je izračunati ubrzanje, pređeni put i vreme kretanja tela niz strmu ravan.

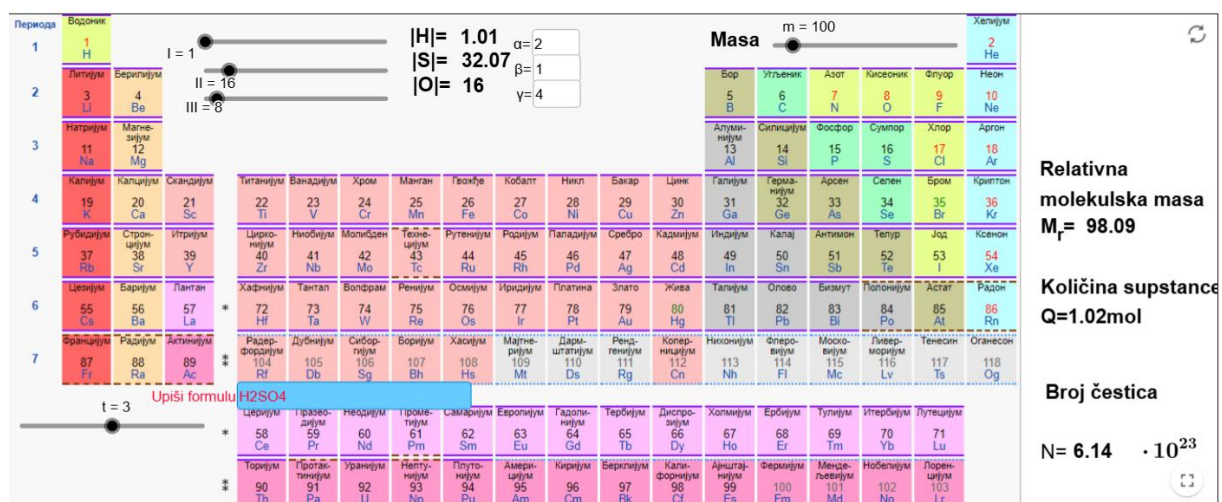
Promenljive veličine uneti preko klizača ili unosom u odgovarajuća polja.



Slika 2. Zakon strme ravni

2.2. Matematika i hemija

Integraciju matematike i hemije najočiglednija je na primerima pravljenja rastvora i smeše kroz primenu procentnog računa, računa podele i mešanja. U apletima urađenim u geogebri moguće je unositi proizvoljne vrednosti za ulazne veličine a rešenja problema i vizuelno predstaviti. Posebno interesantan primer je Periodni sistem sa relativnim atomskim masama elemenata na kome je moguće izračunati molekulске mase hemijskih jedinjenja, količinu supstance i broj strukturnih jedinica (Slika 3).



Slika 3. Interaktivni Periodni sistem elemenata

Najpre u polju „Upiši formulu“ napišemo formulu jedinjenja koje ćemo posmatrati. Zatim se na klizaču „t“, u donjem dresnom uglu, unese broj elemenata koji grade molekul tog jedinjenja. Otvaraju se novi klizači (gore levo) na kojima biramo redne brojeve elemenata iz jedinjenja. U poljima iza oznaka za elemente unosi se broj atoma sa kojim oni učestvuju u posmatranom molekulu. Na klizaču

„Masa“ unosimo količinu supstance koju posmatramo u gramima. Desno od Periodnog sistema dobijamo ispisane numeričke karakteristike jedinjenja [4].

2.3. Matematika i biologija

Kao primer primene Geogebre u integraciji matematike i biologije pripremili smo aplet o Hardi-Vajnbergovom principu [5]. On predstavlja matematički model kojim se određuje genetička struktura neke populacije, a koja podrazumeva određivanje učestalosti alela i genotipova u populaciji. Prezentovano je nekoliko primera zadatka iz ove oblasti. Na naslovnom slajdu date su učestalosti dominantnih i recesivnih alela i formulisan je pomenuti princip, koji koristi kvadrat binoma. U donjem levom uglu je klizač „n” na kojem se bira redni broj zadatka. Ispod teksta zadatka je polje „Rešenje” čijim čekiranjem se pojavljuje tekst rešenja ukoliko učenik ne može samostalno da reši zadatak (Slika 4).

A - dominantan alel
a - recesivan alel

	A (p)	a (q)
A (p)	AA (p ²)	Aa (pq)
a (q)	aA (qp)	aa (q ²)

AA - dominantni homozigoti (D)
Aa - heterozigoti (H)
aa - recesivni homozigoti (R)

Hardi - Vajnbergov princip

$$p^2 + 2pq + q^2 = 1$$

$$p + q = 1$$

n = 1

ZADATAK 1: U populaciji jezerske žabe pojavilo se 420 žaba sa tamnim tačkama (dominantna osobina) i 80 sa svetlim. Odrediti učestalost recesivnog gena i broj heterozigota.

☒ Rešenje

$$q^2 = \frac{80}{420 + 80} = \frac{4}{25} \Rightarrow q = \frac{2}{5}$$

$$p = 1 - q = \frac{3}{5}$$

$$2pq = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25} = 0.48$$

$$H = 500 \cdot 0.48 = 240$$

Slika 4. Primer primene Hardi-Vajnbergovog zakona

3. IZRADA APLETA

U apletu [6] predstavljen je teorijski sadržaj i nekoliko zadataka o kosom hici. Postupak izrade apleta predstavljemo na tom primeru. Na slici 5. je prikazan i jedan od slajdova tog apleta.

n = 2

t = 0

Isti domet za $\beta = 90^\circ - \alpha$

Maksimalna visina H = ? (ekstrem funkcije y)

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t = 0$$

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

$$H = y_{\text{maks}} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g \cdot v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g^2}$$

Maksimalna visina: $H = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$

Slika 5. Slajd sa apleta o kosom hici

Dakle, istaćićemo sledeće faze izrade apleta:

1. Kreiramo klizače za ulazne veličine:
 - a) za redni broj slajda
 - b) za početnu brzinu
 - c) za ugao
 - d) za vreme
2. U polje za unos upisujemo parametarske jednačine kosog hica za promenljive i određujemo tačku u preseku koordinata. Dobijenoj tački potvrdimo opciju traga
3. Uključujemo animaciju za klizač vremena i podešavamo njegove osobine
4. Podešavamo „Polje za unos i skrivanje podataka“ za veličine: domet, maksimalnu visinu i vreme trajanja leta
5. Opciono, radi bolje preglednosti i vizuelno lepšeg rasporeda objekata na radnoj površini, neke klizače možemo zameniti tekstualnim poljima u koje se unose vrednosti za odgovarajuće veličine. Ovde smo to uradili za početnu brzinu i ugao pod kojim se ispaljuje hitac
6. Za sve elemente sa radne površine u polju „Uslov za prikazivanje“ upisati redne brojeve slajdova u kojima se ti objekti pojavljuju
7. Dalje kreiramo teoretski sadržaj, izvođenja jednačina i bitnih karakteristika kosog hica. Tekst možemo uneti direktno u Geogebra ili uvozom iz nekog naprednijeg editora teksta. Formule i slike rasporedimo radi preglednosti na više slajdova unošenjem vrednosti sa klizača za redni broj slajda u polje za „Uslov prikazivanja“.
8. Na analogan način unosimo primere (zadatke) sa rešenjem ili uputstvom
9. Proverimo raspored slajdova listanjem na klizaču i popravimo eventualne nedostatke
10. Snimimo fajl i izvezemo ga na Geogebra profil

4. ZAKLJUČAK

Danas postoji veliki broj kompjuterskih aplikacija koje se uspešno mogu primeniti na različitim nivoima nastave. Geogebra je primarno pripremljena za nastavu matematike u srednjim školama a novije verzije su opremljene i moćnijim alatima koji mogu naći primenu u visokoškolskom obrazovanju. Alati geometrijskih transformacija i mogućnost animacije omogućuju dinamički prikaz i simulaciju realnih prirodnih procesa i kretanje objekata. Na taj način ovaj program poboljšava klasičnu integraciju matematike i prirodnih nauka. Sve je to dopunjeno opcijama složenih izračunavanja matematičkih operacija i funkcija, kao i posmatranje relacija među objektima. Apleti napravljeni u Geogebra se jednostavno postavljaju na internet pa mogu biti dostupni širokom krugu nastavnika i učenika. Zahvaljujući tome program je stekao široku popularnost i primenu, najpre u matematičkim krugovima a posle i u drugim naukama povezanim sa matematikom. Ovde smo naveli samo nekoliko primera, koje smo zajedno kao koautori izabrali, u kojima je uloga Geogebre u integraciji matematike i prirodnih nauka pokazala svoju efikasnost.

5. LITERATURA

- [1] <https://www.geogebra.org/m/wH5ajHwY>, april 2025
- [2] <https://www.geogebra.org/m/wH5ajHwY#material/yMFr7hT>, april 2025
- [3] <https://www.geogebra.org/m/d6akQgAp#material/CpXSxtaT>, april 2025
- [4] <https://www.geogebra.org/m/d6akQgAp#material/hneQCcrzw>, april 2025
- [5] <https://www.geogebra.org/m/d6akQgAp#material/wr8K4cCP>, april 2025
- [6] <https://www.geogebra.org/m/d6akQgAp#material/UKyxU3ef>, april 2025